Goede problemen

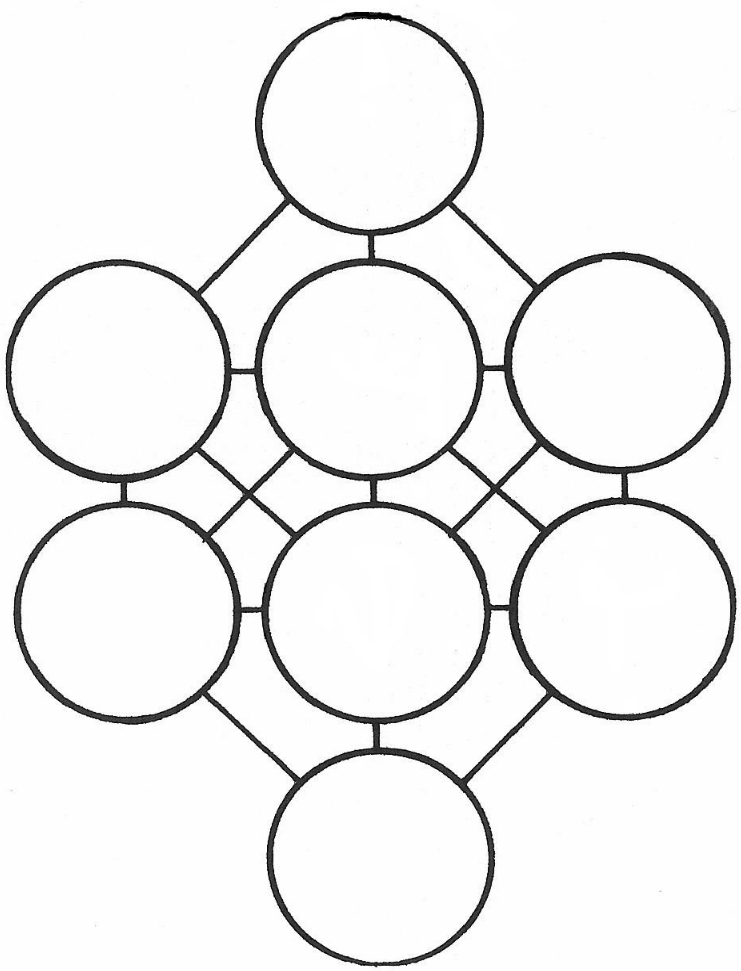
- Acht plaatsen

- Midden tussen getallen
- Bepaal de diagonaal

- De kortste weg
- De toren van Hanoï

J.Menne@mennevooruit.nl

Acht plaatsen

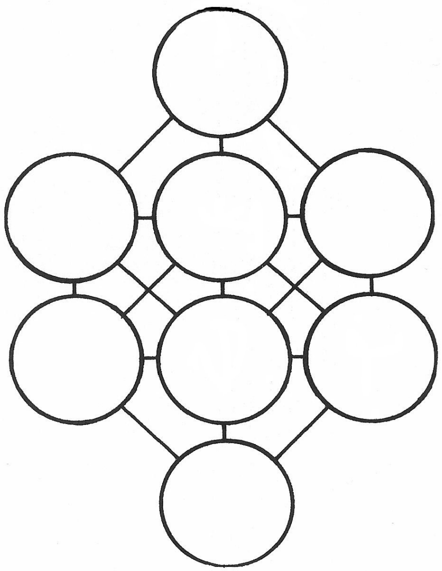
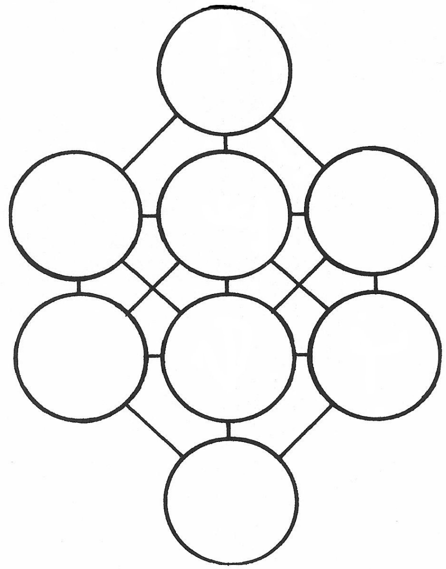
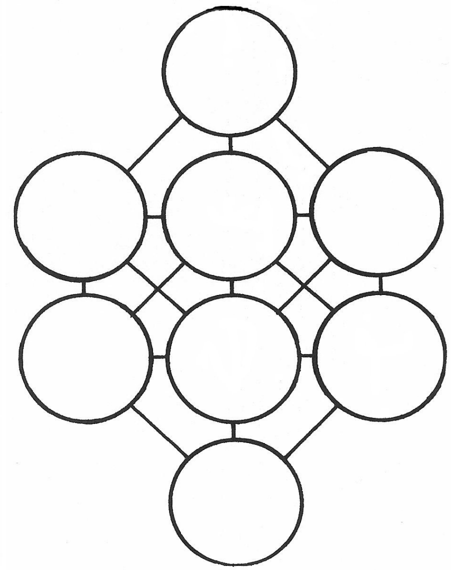
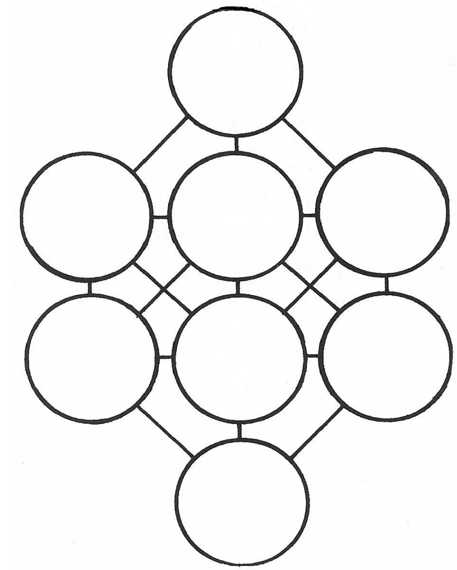
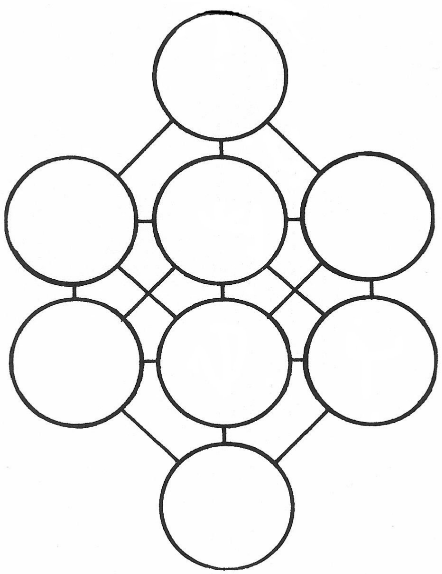
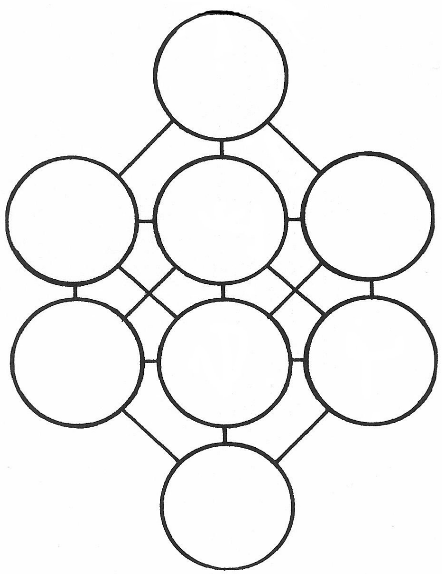
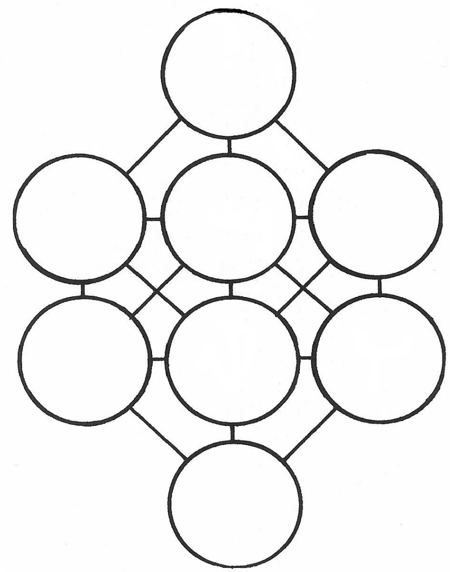
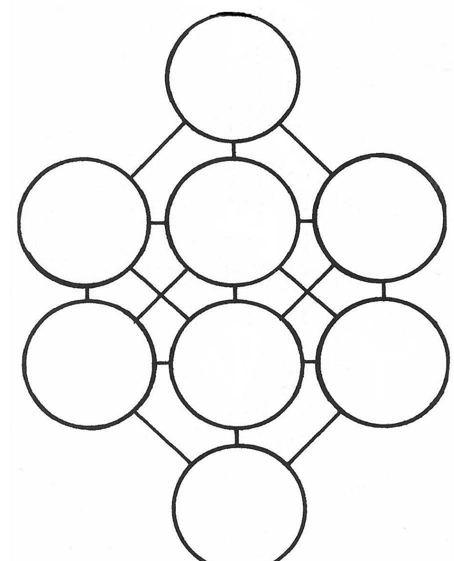


1. Noteer de cijfers 1 t/m 8 zo in het hiernaast staande figuur dat er geen opeenvolgende cijfers met elkaar verbonden zijn.

2. Heb je alle mogelijke oplossingen? Bewijs.

3. Hoeveel mogelijkheden zijn er?

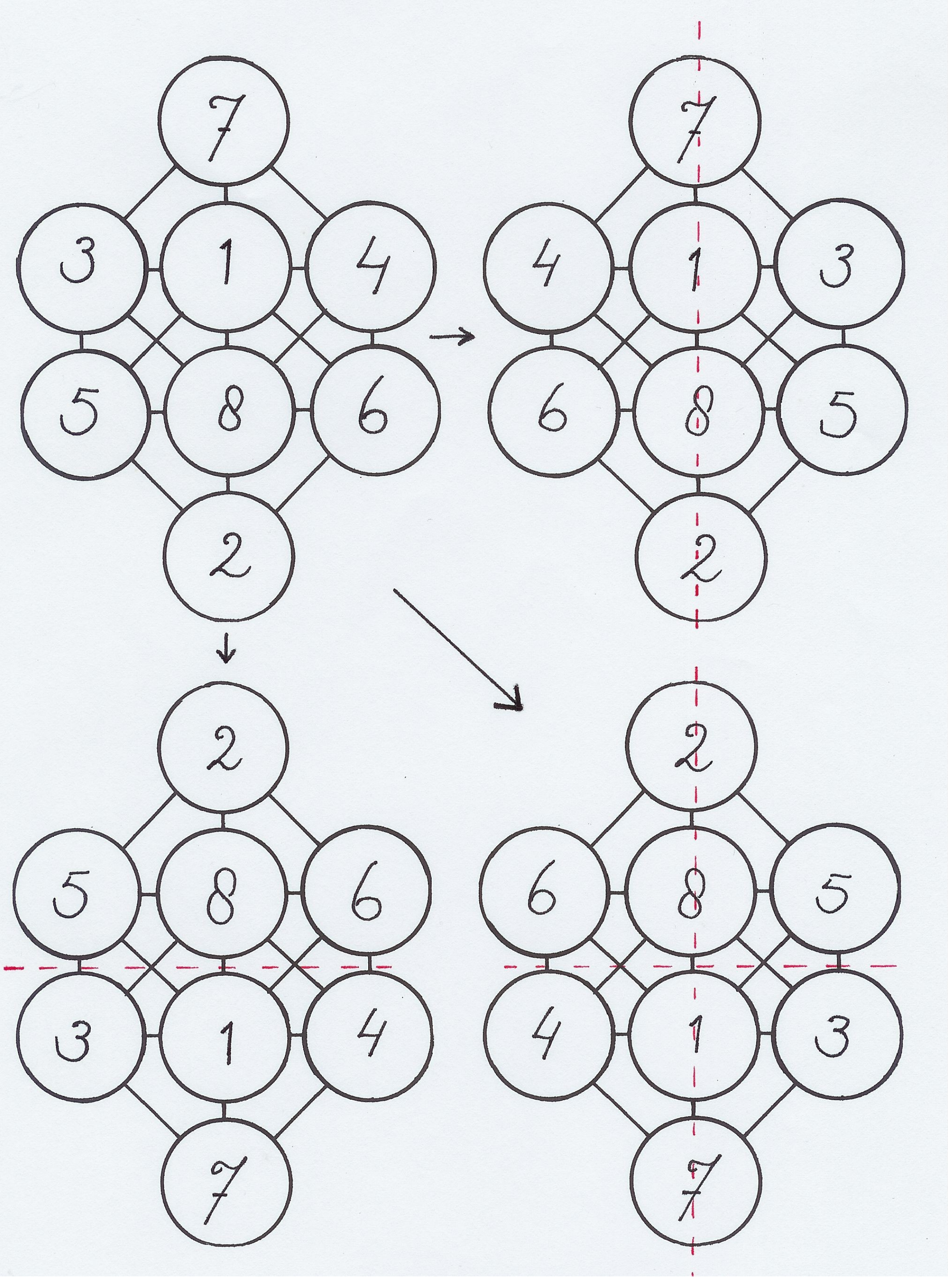
Werkblad bij 'Acht plaatsen'

Benodigd materiaal 'Acht plaatsen'

- Potlood
- Gum
- Werkblad

Vier mogelijke oplossingen



Uitbreiding

- Doe hetzelfde voor de cijfers 0 t/m 9 in het logo van TALPA.
- Heb je alle mogelijke oplossingen? Bewijs.
- Hoeveel mogelijkheden zijn er?

Kenmerken goede problemen

- Uitdagend
- Op verschillende niveaus op te lossen
- Verbinding met reguliere leerstof
- Oplossing ligt niet voor de hand
- Genereert weer nieuwe producties
- Rekenkundige structuur te ontdekken
- Oefenen tijdens oplossen
- Schematiseren

Voldoet 'Acht plaatsen' aan de kenmerken?

- Uitdagend: *Je kunt er zo aan beginnen*
- Op verschillende niveaus op te lossen: *Bijv. via trial en error of juist meer beredeneerd*
- Verbinding met de reguliere leerstof: *ordenen, mentale getallenrij, logisch redeneren*
- Oplossing ligt niet voor de hand: *Je moet notities maken*
- Genereert weer nieuwe producties: *Bijv. Talpa-probleem*
- Rekenkundige structuur te ontdekken: *Dit is hier minder van toepassing*
- Oefenen tijdens oplossen: *Ja en je doorziet het beter*
- Schematiseren: *Systematisch werken helpt oplossingen te vinden*

Midden tussen getallen

- Bepaal het midden tussen 21 en 85.
- Wat moet je hiervoor kunnen?
- Noteer een aantal te verwachten oplossingswijzen van leerlingen.
- Orden ze van een laag naar een hoog niveau.
- Welke doelen kun je met deze opdracht bereiken? En hoe bied je het aan?
- Waarom is het een goed probleem?

Benodigd materiaal 'Midden tussen getallen'

- Potlood
- Gum
- A4-tjes

Wat moet je hiervoor kunnen?

- Tellen vanaf een willekeurig getal.

- Sprong van 10 vanaf een willekeurig getal.

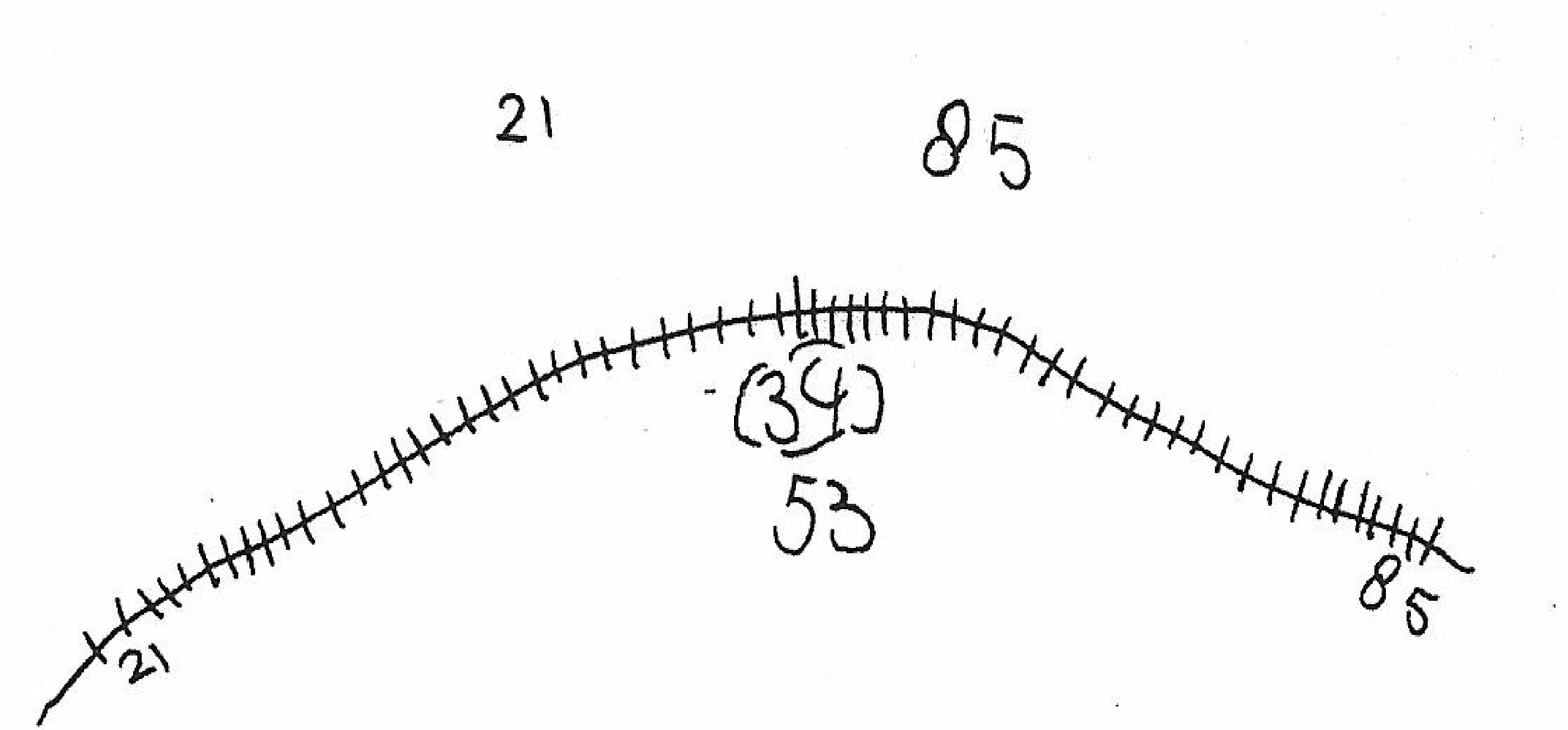
- Het verschil delen.

Oplossingswijzen

- Tellen
- Naar elkaar toespringen
- Schatten en corrigeren
- Het verschil delen
- Mengvormen van bovenstaande
- Onduidelijk

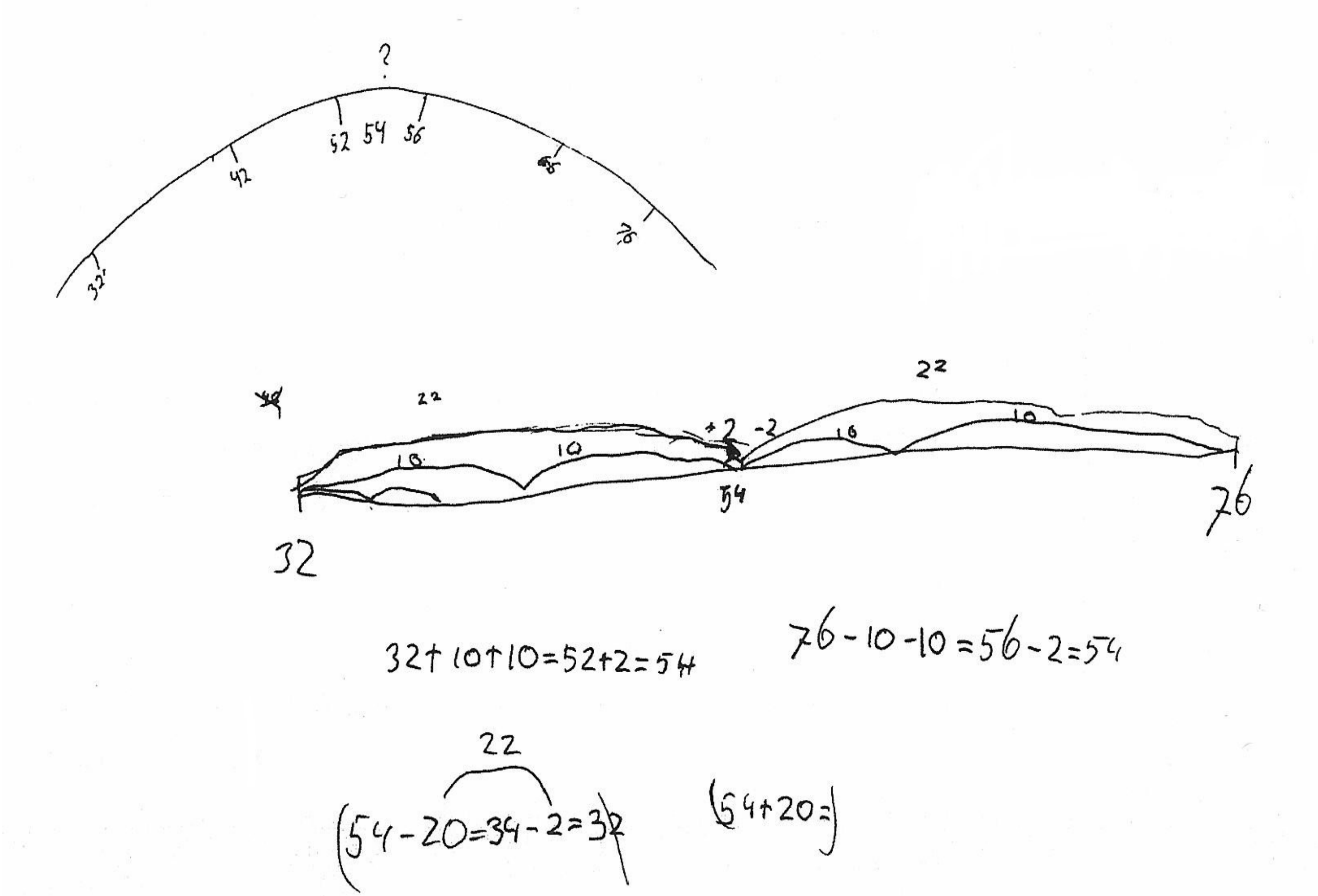
Uit: Veltman, A. & Treffers, A. (1995). Midden tussen de getallen. *Willem Bartjens, 2*, 20-23.

1. Tellen



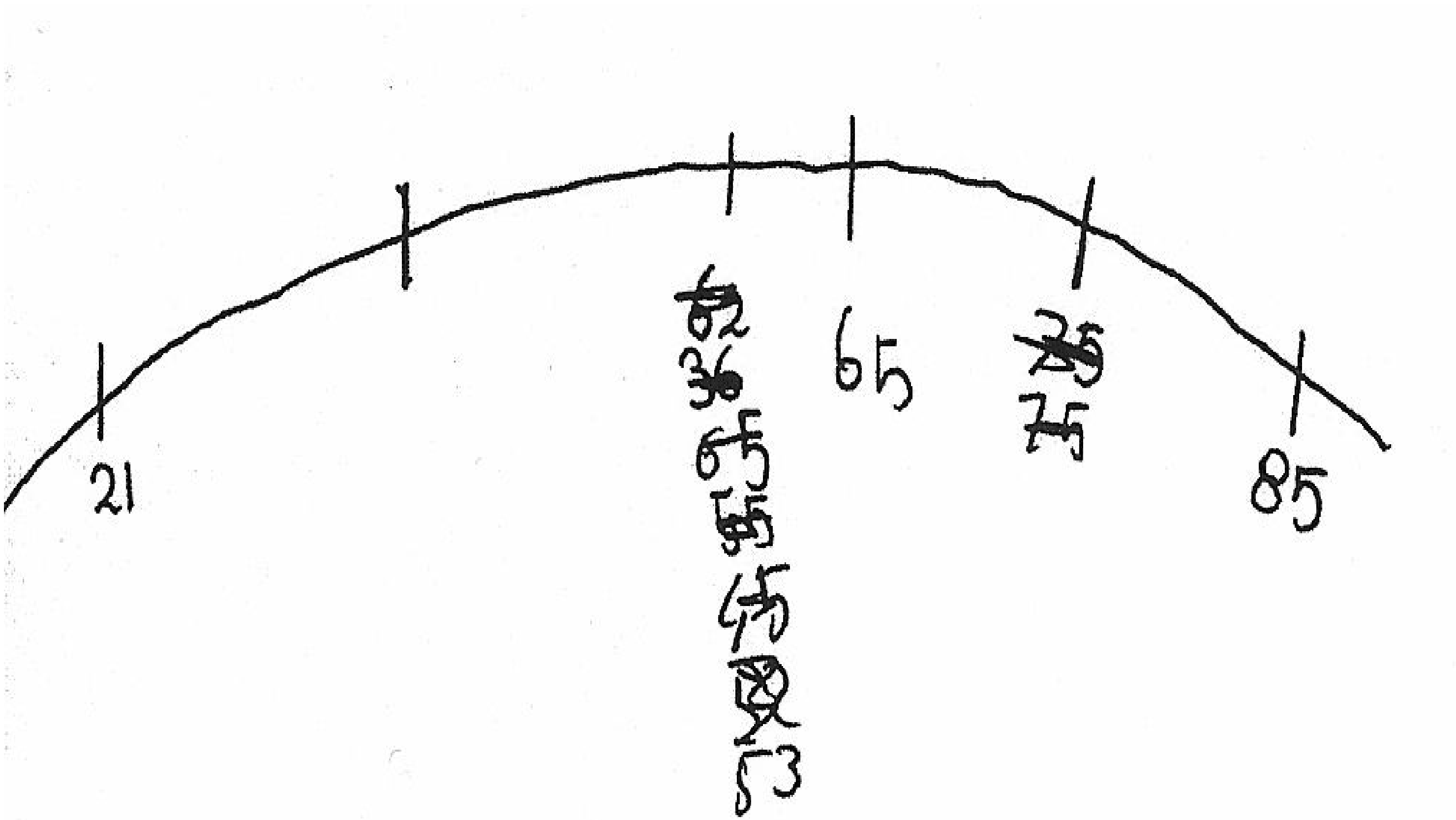
Uit: Veltman, A. & Treffers, A. (1995). Midden tussen de getallen. *Willem Bartjens, 2*, 20-23.

Naar elkaar toespringen



Uit: Veltman, A. & Treffers, A. (1995). Midden tussen de getallen. *Willem Bartjens, 2*, 20-23.

Schatten en corrigeren



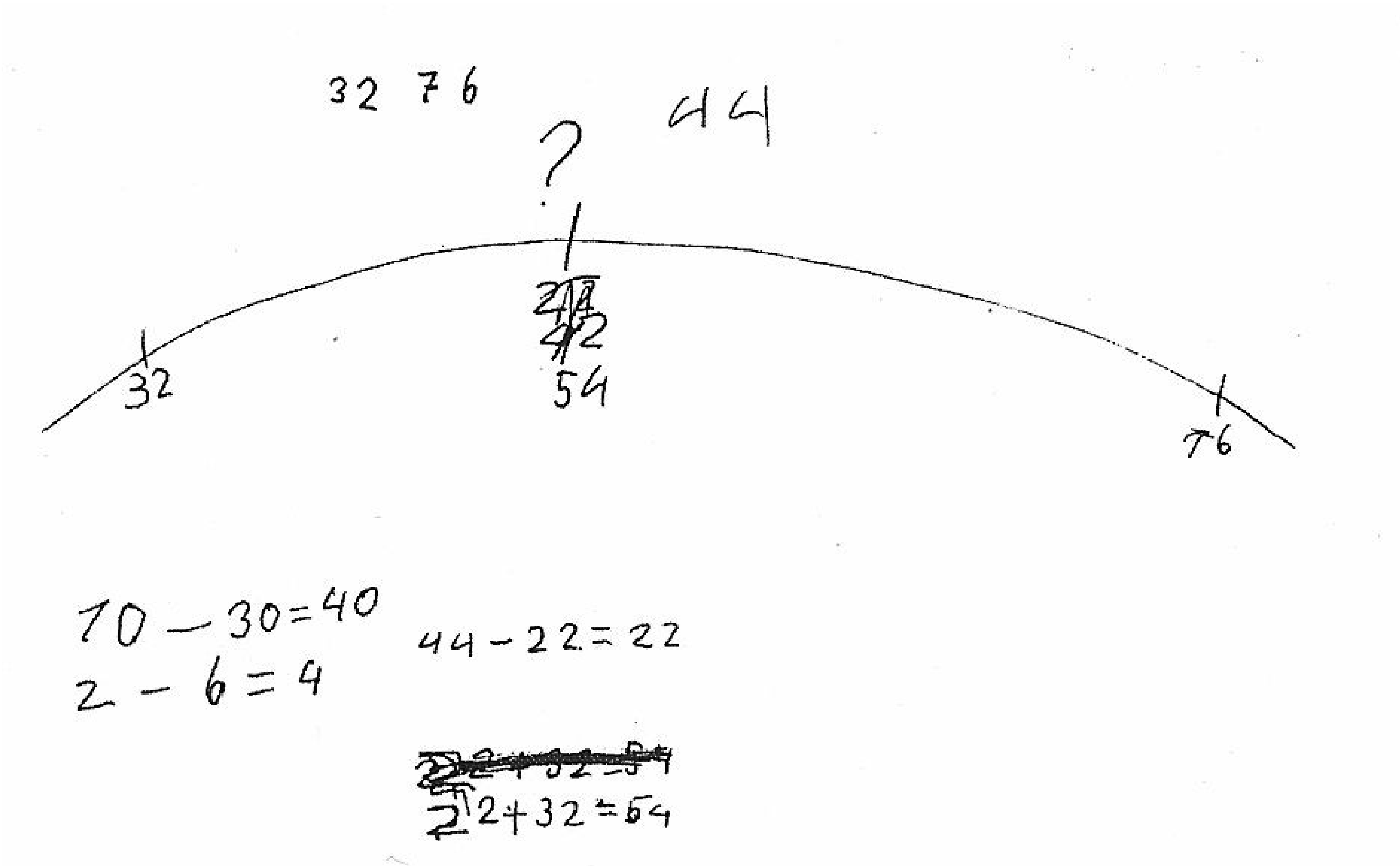
Uit: Veltman, A. & Treffers, A. (1995). Midden tussen de getallen. *Willem Bartjens, 2*, 20-23.

Het verschil delen (1)

- 85 - 21= 64;
  64 : 2 = 32;
  21 + 32 = 53;
  En nog even controleren:
  85 - 32 = 53

Uit: Veltman, A. & Treffers, A. (1995). Midden tussen de getallen. *Willem Bartjens, 2*, 20-23.

Het verschil delen (2)



Uit: Veltman, A. & Treffers, A. (1995). Midden tussen de getallen. *Willem Bartjens, 2*, 20-23.

Doelen

- Zicht krijgen op onderlinge ligging van de getallen
- Sprongen van 10 vanaf willekeurig getal
- Verschil bepalen
- Schatten en corrigeren van de schatting
- Uitkomst controleren door optellen en aftrekken
- Komen tot verkorte rekenwijze

Uit: Veltman, A. & Treffers, A. (1995). Midden tussen de getallen. *Willem Bartjens, 2*, 20-23.

Aanbieden

- Start: Eenvoudige getallen op getallenlijn
- Vervolgens telkens lastigere getallen:
  20 en 50; 21 en 85; 33 en 65
- Tot slot, een conflictsituatie: 43 en 78

- Werken in tweetallen
- Tussentijds plenair reflecteren op oplossingswijzen

Uit: Veltman, A. & Treffers, A. (1995). Midden tussen de getallen. *Willem Bartjens, 2*, 20-23.

Kenmerken goede problemen

- Uitdagend
- Op verschillende niveaus op te lossen
- Verbinding met reguliere leerstof
- Oplossing ligt niet voor de hand
- Genereert weer nieuwe producties
- Rekenkundige structuur te ontdekken
- Oefenen tijdens oplossen
- Schematiseren

Voldoet 'Midden tussen getallen' aan de kenmerken?

- Uitdagend: *Verwondering: hebben getallen een midden?*
- Op verschillende niveaus op te lossen: *Zowel ten aanzien van de strategie (zie sheets 'Oplossingswijzen'), mate van verkorting (zie sheet 'Naar elkaar toespringen') als de formalisering (Zie sheets 'Verschil delen (1) en (2)').*
- Verbinding met reguliere leerstof: *Zie sheet 'Doelen'*
- Oplossing ligt niet voor de hand: *Zie sheets 'Oplossingswijzen'*
- Genereert weer nieuwe producties: *Midden tussen moeilijkere getallen*
- Rekenkundige structuur te ontdekken: *Midden = Verschil delen*
- Oefenen tijdens oplossen: *Er wordt veel gerekend tijdens oplossen*
- Schematiseren: *Systematisch werken bijv. op een lege getallenlijn*

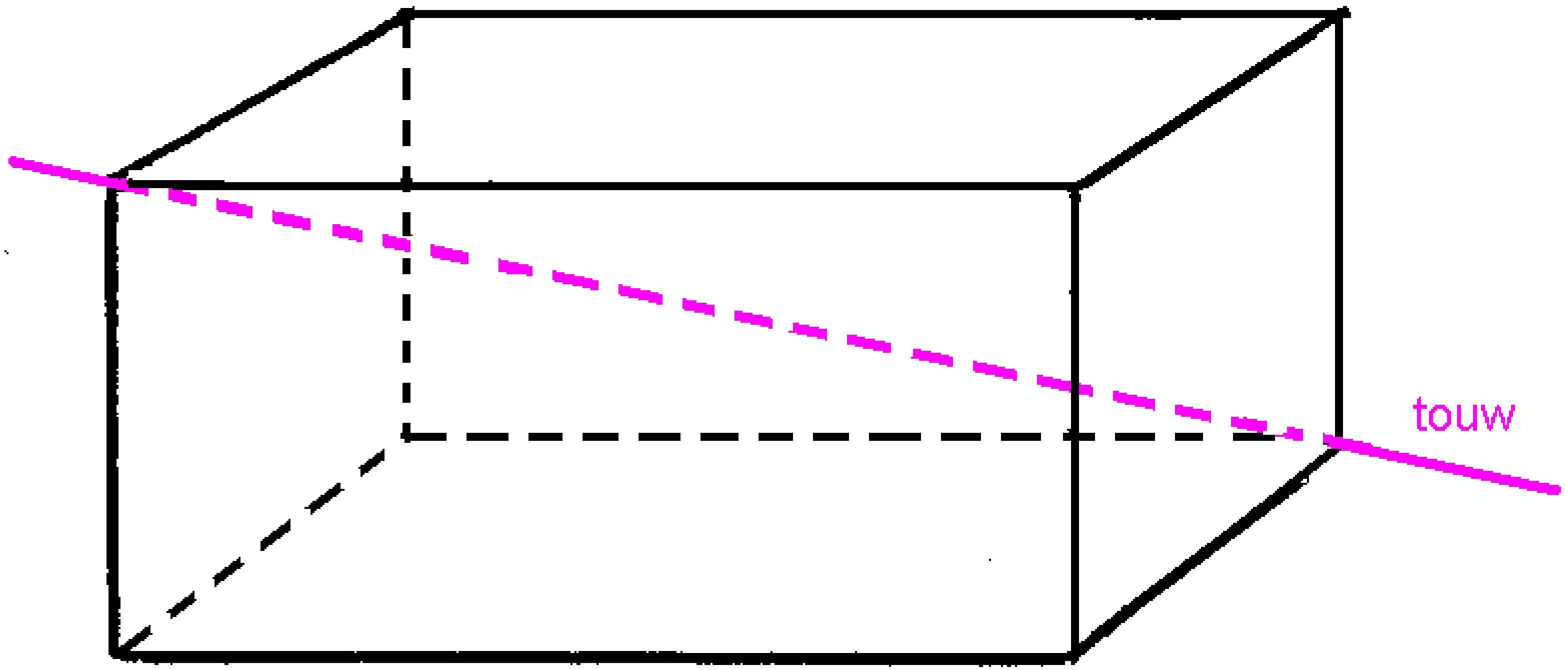
Bepaal de diagonaal

- Voor je ligt een baksteen. Bepaal de lengte van de diagonaal door deze baksteen.
- Beschrijf hoe je te werk bent gegaan.
- Het gaat niet zozeer om het antwoord als wel om de oplossingswijze. Zie je meerdere mogelijkheden om tot een oplossing te komen? Noteer deze dan.
- Welke oplossingswijze geeft het meest preciese antwoord?

Benodigd materiaal 'Bepaal de diagonaal'

- Baksteen
- A4-tjes
- Pen, potlood, gum
- Liniaal
- Schaar
- Touw, garen
- Stuk oase, mesje

Manier 1:



Baksteen aan het spit

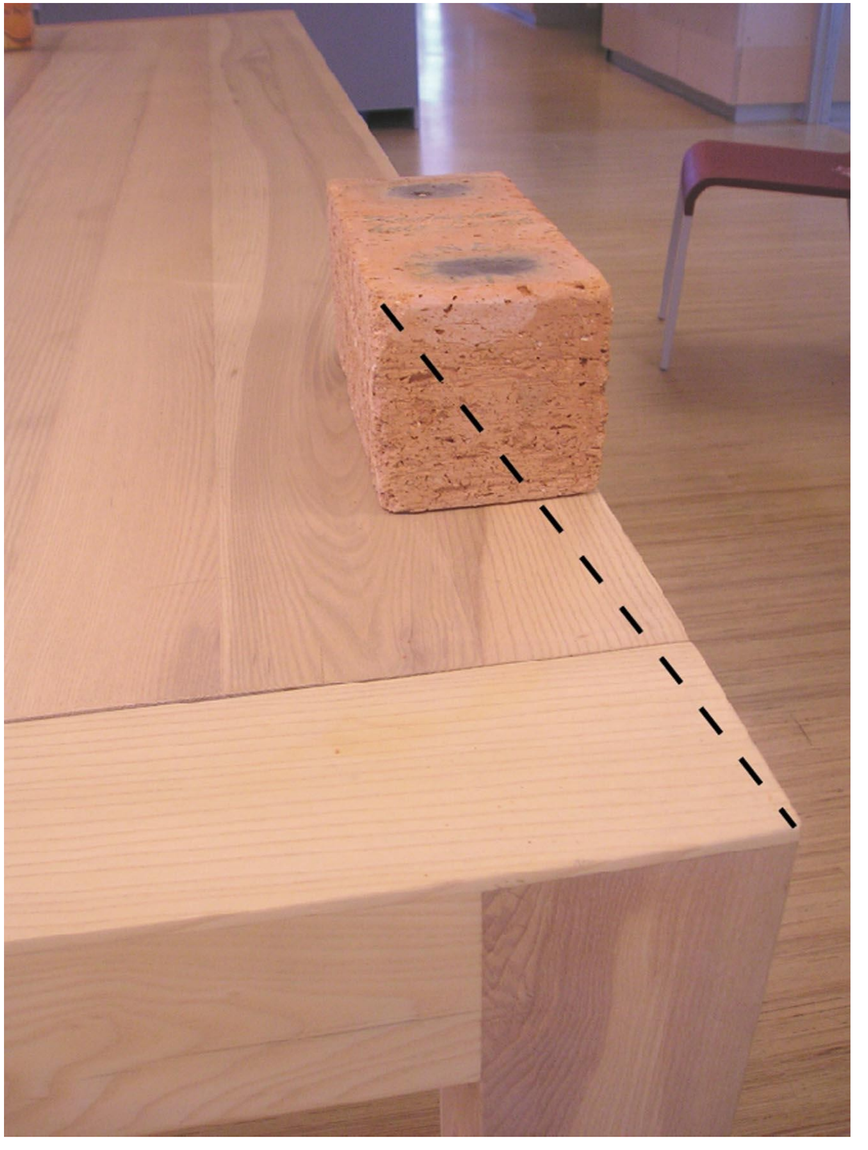
Manier 2: Baksteen op hoekpunt van de tafel plaatsen

Manier 2 (vervolg):

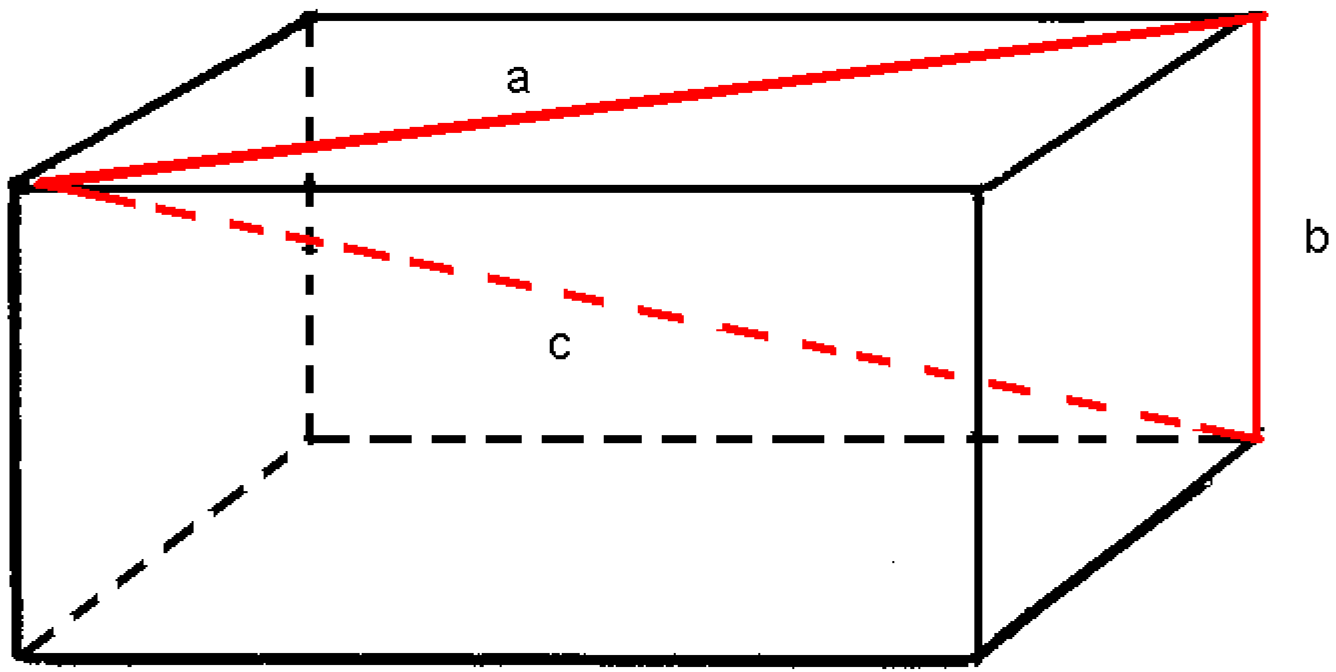
Vervolgens eenmaal z'n lengte opschuiven

Manier 2 (vervolg):

Stel de lichaamsdiagonaal vast door vanaf de linkerbovenhoek van de baksteen tot aan de rechterhoek van de tafel de lengte op te meten.

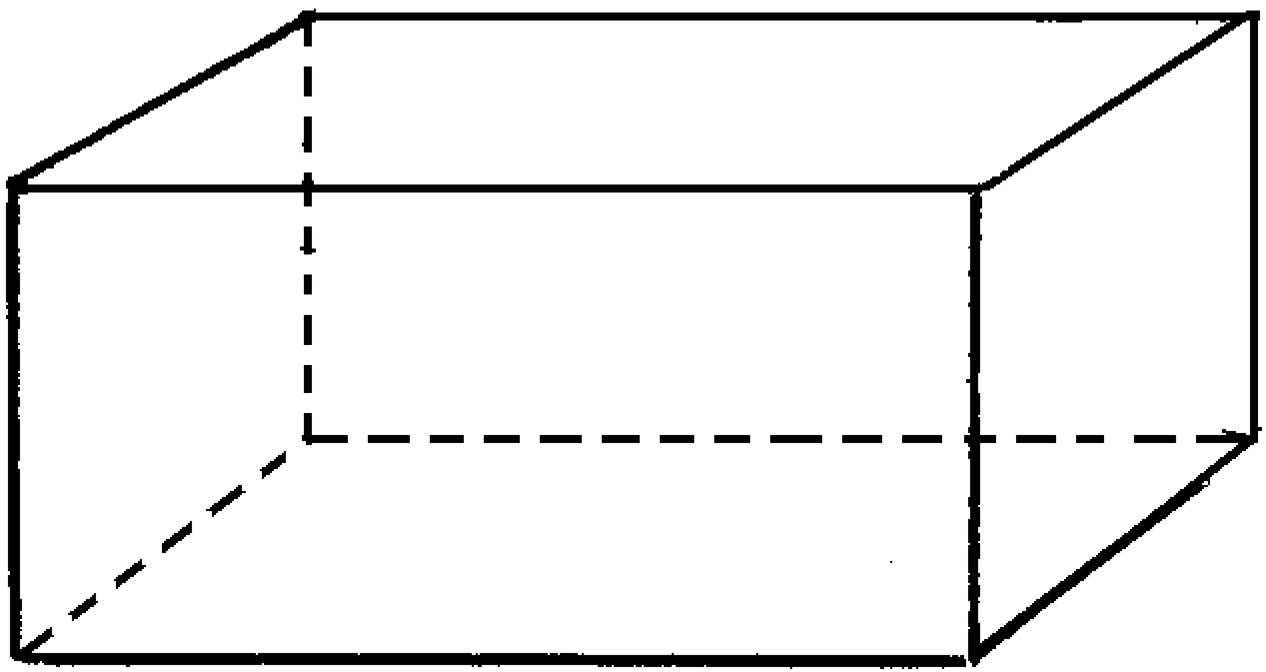


Manier 3: M.b.v. Pythogoras



$$a^2+b^2=c^2$$

Manier 4



Teken de bakstaan (op schaal) en meet de lichaamsdiagonaal

Manier 5

- Maak de baksteen na van oase.
- Snij vervolgens deze baksteen op de lichaamsdiagonaal open.
- Meet ten slotte de lichaamsdiagonaal op.

Kenmerken goede problemen

- Uitdagend
- Op verschillende niveaus op te lossen
- Verbinding met reguliere leerstof
- Oplossing ligt niet voor de hand
- Genereert weer nieuwe producties
- Rekenkundige structuur te ontdekken
- Oefenen tijdens oplossen
- Schematiseren

Voldoet 'Bepaal de diagonaal' aan de kenmerken?

- Uitdagend: *Meteen mogelijkheden bespreken*
- Op verschillende niveaus op te lossen: *Manier 2 is het hoogste niveau van oplossen dat wordt nagestreefd voor het basisonderwijs, manier 3 behoort tot het voortgezet onderwijs*
- Verbinding met reguliere leerstof: *Ontwikkelen ruimtelijk voorstellings- en redeneervermogen (voornaamste doel van de meetkunde, zie p. 115 'Jonge kinderen leren meten en meetkunde' (2004)).*
- Oplossing ligt niet voor de hand: *Indirect meten*
- Genereert weer nieuwe producties: *Evt. bepalen lichaamsdiagonaal van willekeurige objecten*
- Rekenkundige structuur te ontdekken: *Niet van toepassing*
- Oefenen tijdens oplossen: *t.a.v. meten: lengte bepalen; t.a.v. meetkunde: construeren & opereren met vormen en figuren*
- Schematiseren: *(Mentale) voorstelling (na)maken*

De kortste weg

- Een drietal hongerige vliegen en hun lekkere hapjes bevinden zich op een schoenendoos. De vliegen kunnen van de honger en uitputting niet meer vliegen.

a. Bepaal de kortste weg van de rode vlieg naar het rode hapje.

b. Doe ditzelfde voor het gele hapje. Maak hierbij gebruik van het principe dat je bij a. hebt gehanteerd.

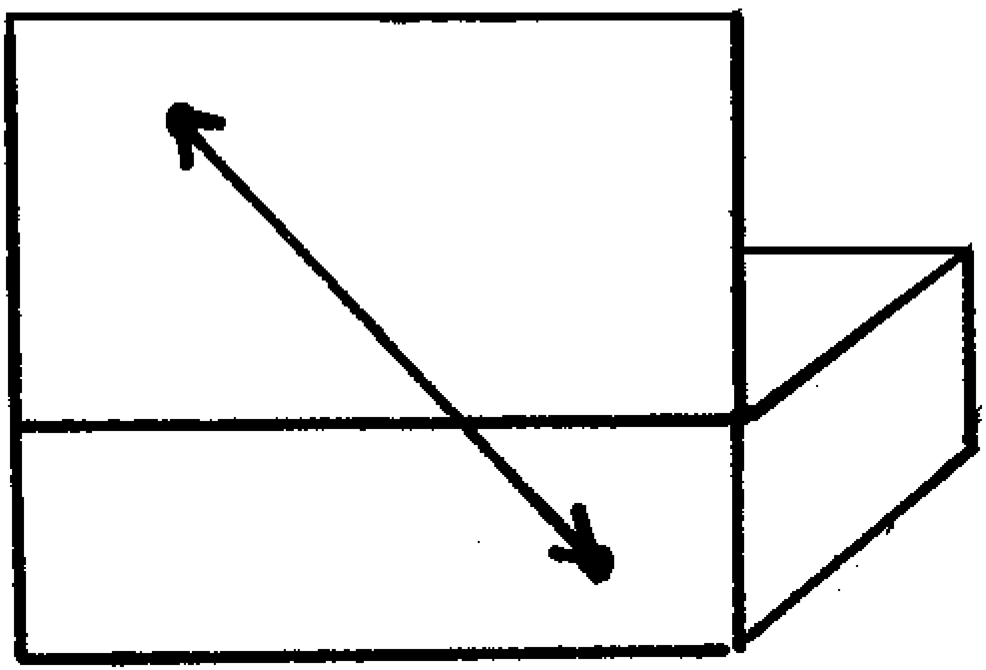
c. Wat is de kortste weg van de blauwe vlieg naar het blauwe hapje?

Uit: Menne, J. & Boswinkel, N. (2004). *Practicumopdrachten NRD 2004*. Universiteit Utrecht: Freudenthal Instituut.

Benodigd materiaal 'De kortste weg'

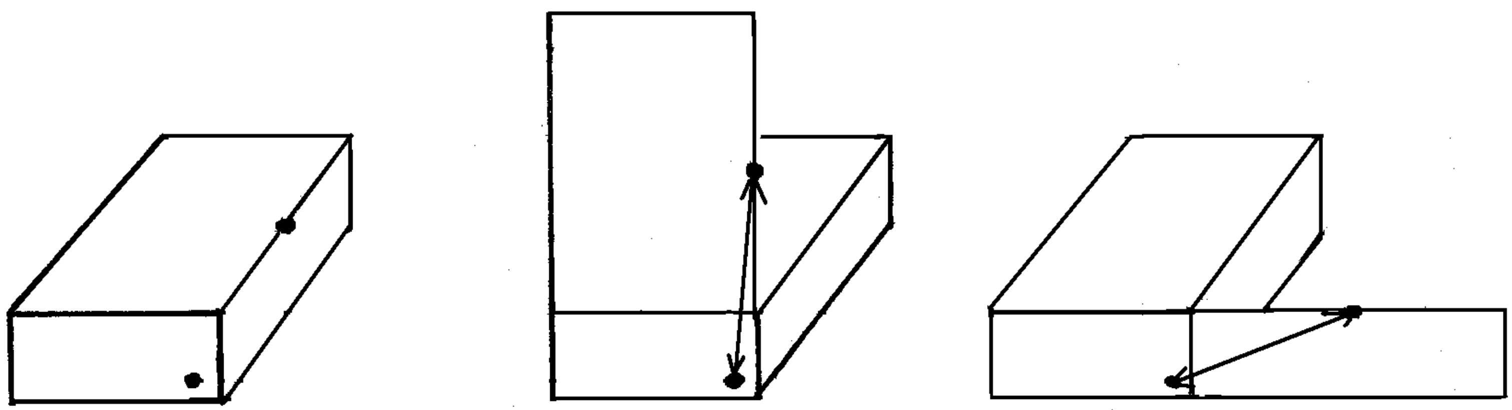
- Schoenendoos met drie vliegen en drie lekkere hapjes
- Pen, potlood, gum
- A4-tjes
- Liniaal
- Touw, schaar, lijm, plakband

a. De kortste weg



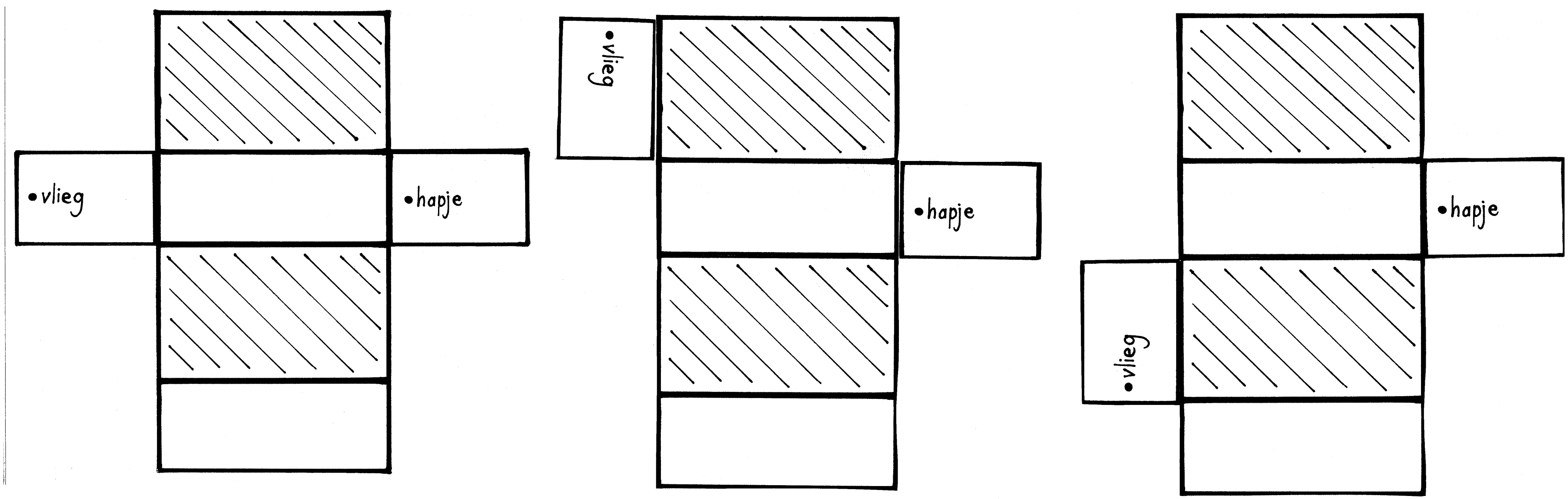
Uit: Menne, J. & Boswinkel, N. (2004). *Reflectie Practicumopdrachten NRD 2004*. Universiteit Utrecht: Freudenthal Instituut.

b. De kortste weg



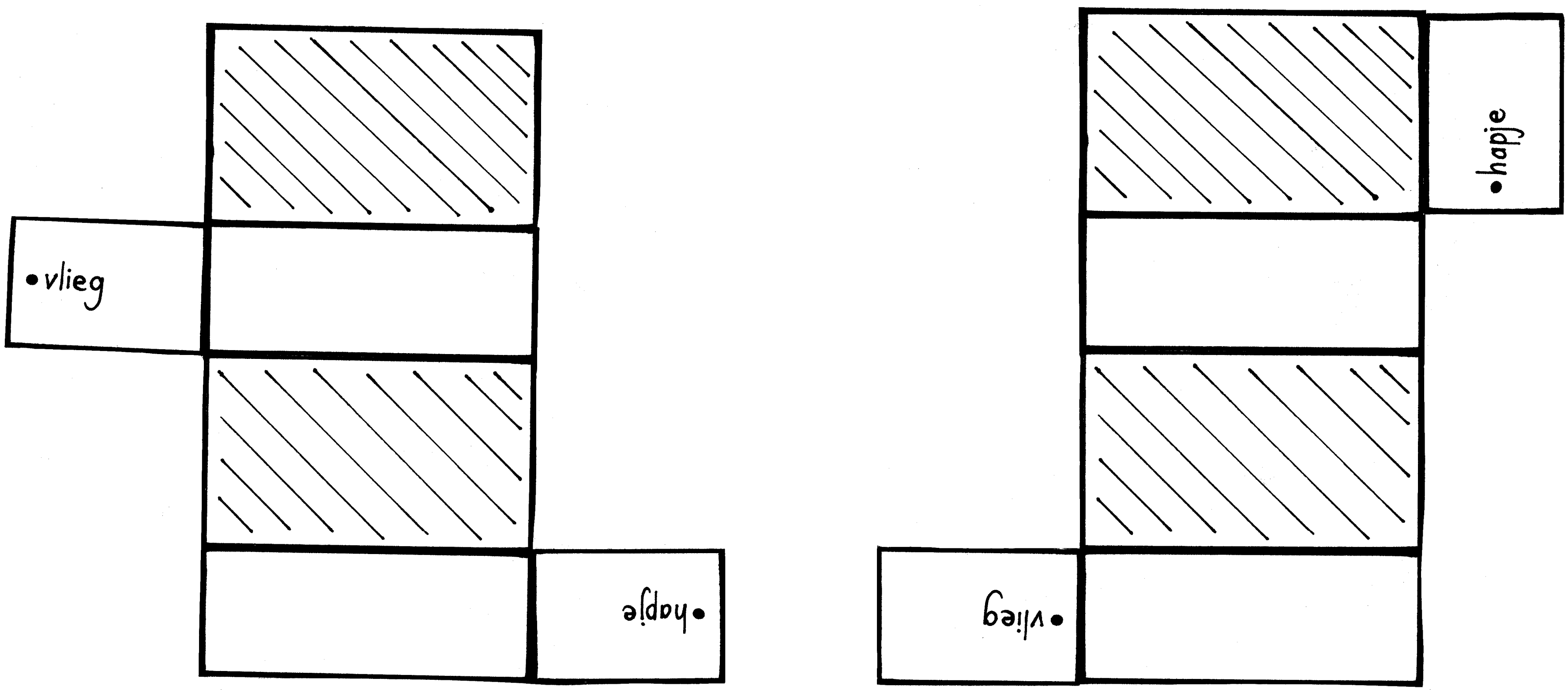
Uit: Menne, J. & Boswinkel, N. (2004). *Reflectie Practicumopdrachten NRD 2004*. Universiteit Utrecht: Freudenthal Instituut.

c. De kortste weg?



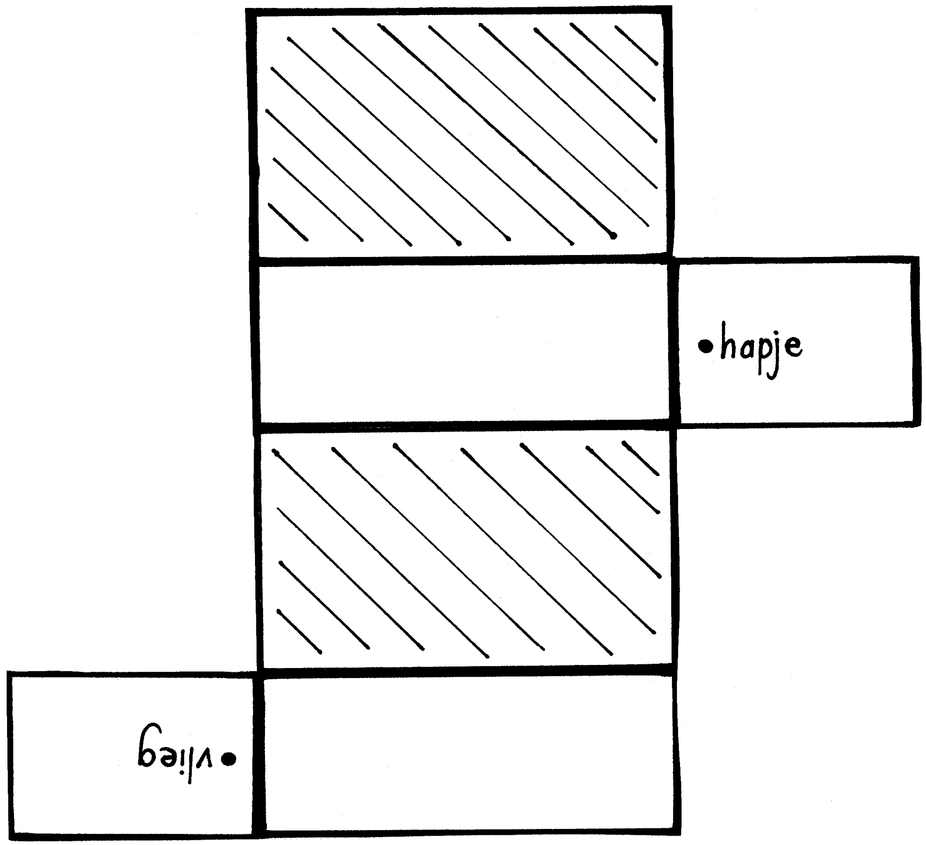
Uit: Menne, J. & Boswinkel, N. (2004). *Reflectie Practicumopdrachten NRD 2004*. Universiteit Utrecht: Freudenthal Instituut.

Onmogelijke routes



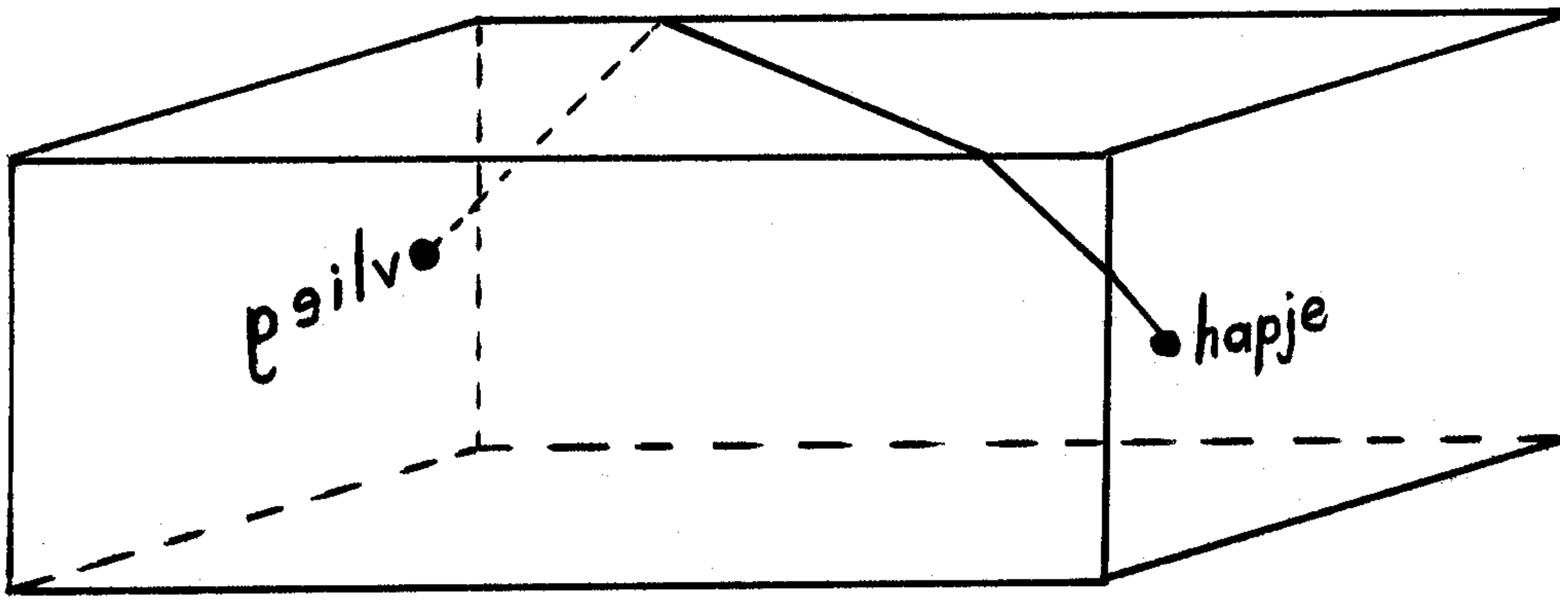
Uit: Menne, J. & Boswinkel, N. (2004). *Reflectie Practicumopdrachten NRD 2004*. Universiteit Utrecht: Freudenthal Instituut.

c. Antwoord



Uit: Menne, J. & Boswinkel, N. (2004). *Reflectie Practicumopdrachten NRD 2004*. Universiteit Utrecht: Freudenthal Instituut.

c. De kortste weg gaat over vijf vlakken!



Uit: Menne, J. & Boswinkel, N. (2004). *Reflectie Practicumopdrachten NRD 2004*. Universiteit Utrecht: Freudenthal Instituut.

Hulpopdrachten bij kortste route

- Maak een uitslag van de doos
- Knip de zijvlakken met de vlieg en de hap los.
- Construeer al handelend verschillende routes
- Hoeveel verschillende routes kun je maken?
  In totaal zijn er zestien verschillende uitslagen te maken. Daarvan zijn er vier koppels met dezelfde afstand tussen de vlieg en zijn diner en zes laten een onmogelijke route zien; eentje toont de langste weg en eentje de kortste.
- Meet de kortste route.

Uit: Menne, J. & Boswinkel, N. (2004). *Reflectie Practicumopdrachten NRD 2004*. Universiteit Utrecht: Freudenthal Instituut.

Kenmerken goede problemen

- Uitdagend
- Op verschillende niveaus op te lossen
- Verbinding met reguliere leerstof
- Oplossing ligt niet voor de hand
- Genereert weer nieuwe producties
- Rekenkundige structuur te ontdekken
- Oefenen tijdens oplossen
- Schematiseren

Voldoet 'De kortste weg' aan de kenmerken?

- Uitdagend: *Je kunt direct beginnen. De vragen zijn in opklimmende moeilijkheid gesteld.*
- Op verschillende niveaus op te lossen: *handelend (uitslagen maken, rechte lijnen trekken, meten en vergelijken) mentaal (beredeneren: onveranderlijke relatieve positie van vlieg en hapje. Uitslag maken en meten niet nodig.)*
- Verbinding met reguliere leerstof: *Beter gevoel voor de kortste weg en rechte lijnen in verschillende werelden.*
- Oplossing ligt niet voor de hand: *Ontdekking: afstand tussen twee punten op aangrenzende vlakken verandert niet als de hoek dat wel doet!*
- Genereert weer nieuwe producties: *Zou kunnen (variaties bedenken)*
- Rekenkundige structuur te ontdekken: *Niet van toepassing*
- Oefenen tijdens oplossen: *Meten: veelvuldig vergelijken, afpassen en aflezen*
- Schematiseren: *Uitslag maken*

De toren van Hanoï

De toren van Hanoï

- Verplaats de drie schijven naar een ander stokje. Hierbij gelden de volgende twee spelregels:

  1. Er mag slechts een schijf tegelijk worden verplaatst.
  2. Nooit mag een grotere schijf op een kleinere rusten.

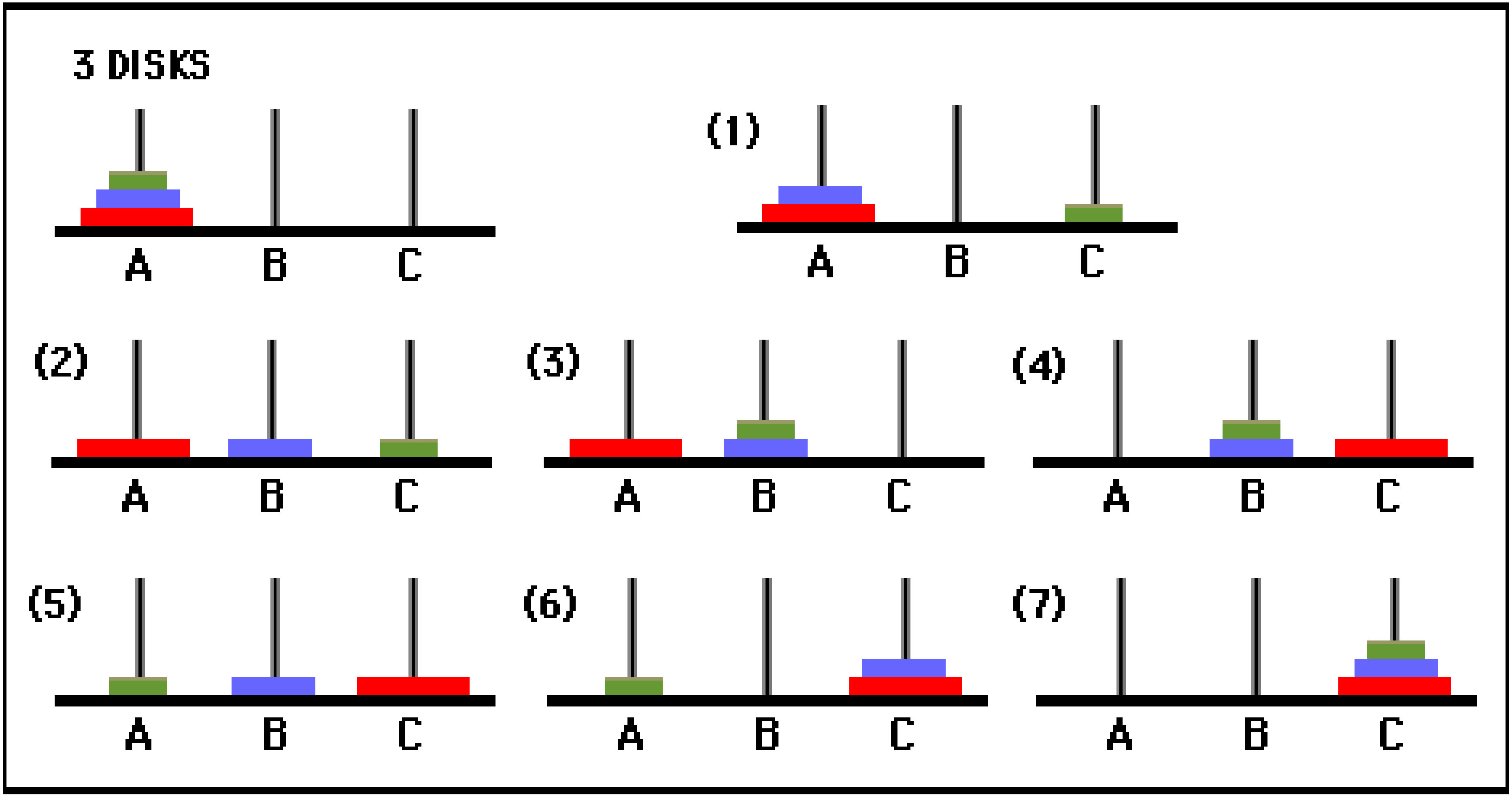
  Hoeveel verplaatsingen zijn hiervoor nodig?

- Doe hetzelfde voor een toren van vier schijven en van vijf schijven. Hoeveel verplaatsingen zijn nodig?
- Welk patroon zie je?
- Voorspel hoeveel verplaatsingen nodig zijn voor alle acht de schijven.
- Verklaar het patroon.

Benodigd materiaal 'De toren van Hanoï'

- Torens van Hanoï (www.Heutink.nl)
- Pen, potlood, gum
- A4-tjes

3 schijven: 7 verplaatsingen



Hoeveel verplaatsingen voor 4 en 5 schijven?

- 4 schijven: 15 verplaatsingen
- 5 schijven: 31 verplaatsingen

Welk patroon zie je?

Schijven:	1	2	3	4	5
Verplaatsingen:	1	3	7	15	31

Voor een schijf *meer* verplaatsen geldt:
2M+1 (M is het aantal verplaatsingen nodig voor een schijf *minder*)

Voorspellen

- Voor het verplaatsen van 8 schijven heb je 255 verplaatsingen nodig.

Sch.:	1	2	3	4	5	6	7	8
Verpl.:	1	3	7	15	31	63	127	255

Verklaar het patroon

- Stel je moet er vijf verplaatsen.
- Dit kost je 1 verplaatsing van de grootste op de derde staaf.
- Je hebt voor een torentje van de vier kleinste 15 verplaatsingen nodig.
- Dit torentje van vier moet op de derde staaf. Dit kost je nog eens 15 verplaatsingen.
- Totaal: $1 + 15 + 15 = 31$
  oftewel $2(M) + 1 = 2(15) + 1 = 31$

Kenmerken goede problemen

- Uitdagend
- Op verschillende niveaus op te lossen
- Verbinding met reguliere leerstof
- Oplossing ligt niet voor de hand
- Genereert weer nieuwe producties
- Rekenkundige structuur te ontdekken:
- Oefenen tijdens oplossen
- Schematiseren

Voldoet de 'Toren van Hanoï' aan de kenmerken?

- Uitdagend: *Opdrachten opklimmend in moeilijkheid, aantrekkelijk materiaal*
- Op verschillende niveaus op te lossen: *Handelend, op een kladblaadje, louter beredenerend*
- Verbinding met reguliere leerstof: *Logisch redeneren*
- Oplossing ligt niet voor de hand: *Vergelijken aantal verplaatsingen*
- Genereert weer nieuwe producties: *Bijv. Hoe lang doe je over het verplaatsen van de echte toren van 64 schijven? (Stel een verplaatsing duurt 1 sec.)*
- Rekenkundige structuur te ontdekken: *Aantal verplaatsingen = 2M+1*
- Oefenen tijdens oplossen: *Tellen, basisoperaties (+, –, x en :)*
- Schematiseren: *Handelingen tekenen, overzichtelijk noteren van aantal schijven en bijbehorende verplaatsingen*